Практикалық сабақ №15

Тақырыбы: Остроградский-Гаусс, Стокс формулалары. Өрістер теориясының элементтері.

Мақсаты: Остроградский-Гаусс, Стокс формулалары. Өрістер теориясының элементтері: градиент, дивергенция, ротор. Потенциалды және соленоидалды өрістер.

Мысал 1. Екінші текті беттік интегралды есептеңіз:

$$I = \iint_{\sigma} z^2 dydz + xzdydz + ydxdy,$$

мұндағы σ тұйық беті $\sigma_1 : x^2 + y^2 = 4 - z, \quad z \geq 0,$ параболоид бөлігінің және $\sigma_2 : z = 0$ жазықтық бөлігінің сыртқы жағы беттерінен тұрады.

Шешуі: Екінші текті I беттік интегралға Остроградский-Гаусс формуласын қолданамыз:

$$I = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

Остроградский-Гаусс формуласының векторлық түрі:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}_n d\sigma = \iiint_{V} div\vec{a} dV,$$

мұнда сол жағында – σ тұйық беті арқылы $\vec{a}$ векторлық өрісінің П ағыны, ал $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Онда $I = \iiint_{V} div\vec{a}\left(M\right) dV,$ мұндағы $\vec{a}\left(M\right)$ векторлық өрісі: $\vec{a}\left(M\right) = z^2\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}.$ Бірақ $div\vec{a}\left(M\right) = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial \left(xz\right)}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0.$ Сондықтан, $I = \iiint_{V} 0 dV = 0.$

Мысал 2. $U(x, y, z)$ скалярлық өрісінің градиентін табыңыз:

$$U(x, y, z) = x^2 - y^2 + y \cdot z - x$$

Шешуі: Скалярлық өріс градиентінің анықтамасы бойынша $gradU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k}$.

$U(x, y, z)$ функциясының дербес туындыларын есептейміз:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 1, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y + z, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = y$$

Сонымен, $gradU = (2x - 1) \cdot \bar{i} + (-2y + z) \cdot \bar{j} + y \cdot \bar{k}$.

Мысал 3. $M = (3,4,5)$ нүктесінде $u = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ өрісінің дивергенциясын табыңыз.

$S_\varepsilon = \{(x,y,z)\in R^3: \quad (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2\}$ шексіз аз сфера арқылы ағыны u вектордың ағыны неге жуықтап тең?

Шешуі:

$$div\,u = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad div\,u(M)=\frac{18}{125}.$$

u өрісінің дивергенциясы является плотностью аддитивной функции областей – потока, облыстардың аддитивтік функцияларының – $w(u;S)$ ағынының тығыздығы болады, оны қалпына келтіру үшін

$$w(u;S)=\iiint\limits_T div\,u(x,y,z)dxdydz$$

формуласы қолданылады, мұндағы

$T=\{(x,y,z)\in R^3: \quad (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2\le\varepsilon^2\}$. Шар шексіз аз болғандықтан, яғни $\varepsilon\to+0$, $div\,u(x,y,z)\approx div\,u(M)=\dfrac{18}{125}$ алуға болады. Сонымен аламыз

$$w(u;S)\approx\iiint\limits_T div\,u(M)dxdydz=\frac{18}{125}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=\frac{24}{125}\pi\varepsilon^3.$$

Аудиториялық жұмысы: Остроградский-Гаусс, Стокс формулалары: [8] №№ 4376, 4387, 4389. *Өрістер теориясының элементтері. Градиент. Дивергенция. Ротор:* [8] №№ 4401, 4403, 4423, 4436, 4445, 4452, 4454, 4457.

Үй жұмысы

4377, 4388, 4390. №№ 3718 б)г), 3733. №№ 4402, 4405, 4427, 4442, 4453, 4455.